

係数が異なる指数関数が線形独立であることの証明

nakorae

2026 年 8 月 12 日

概要

1. 今日の問題

最近電磁気学の本を読んでいたときに、以下のような記述を見かけました。

「

$$E_1 e^{ik_1 x} + E_2 e^{ik_2 x} = E_3 e^{ik_3 x} \quad (1.1)$$

が恒等的に成り立つので、 $k_1 = k_2 = k_3$ で…」

結構自明な気がします、一応示しておこうと思ったので記事を書ってみました。

問題 1

n を自然数とする。相異なる複素数 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ と、複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ について、以下が成立することを示せ。

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\omega_j x} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (1.2)$$

これが示すことができれば、 E_1, E_2, E_3 が0でないことから k_1, k_2, k_3 のうち少なくとも2つが等しいことが示せて、結局

$$Ae^{ikx} = Be^{ilx} \quad (1.3)$$

みたいな問題に帰着できるので、あとは両辺を適当に割れば $k_1 = k_2 = k_3$ が示せます。

2. 解答

いくつか方針が思いつきますね。

解答 1

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\omega_j x} = 0}_{\textcircled{1}} \Leftrightarrow \underbrace{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0}_{\textcircled{2}} \quad (2.1)$$

を示す。②⇒①は明らかなので、以下①⇒②を示す。①のとき、①の両辺を x で k 回微分した

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^n \omega_j^k \alpha_j e^{\omega_j x} = 0 \quad (2.2)$$

も成立し、これに $x = 0$ を代入した

$$\sum_{j=1}^n \omega_j^k \alpha_j = 0 \quad (2.3)$$

も、任意の非負整数 k について成立する。故に、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

が成立する。ここで、以下が成立する。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\omega_j - \omega_i) \quad (2.5)$$

($\because$ 左辺は Vandermonde の行列式) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ が相異なることに注意すると、これは0でないことがわかるので、行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

は正則であることがわかる。従って、

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

でなければならない。よって、① $\Rightarrow$ ②が示された。

解答 2

同じく②⇒①は明らかなので、逆を n についての数学的帰納法によって示す。つまり、自然数 n についての命題 $P(n)$:

「相異なる複素数 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ と、複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ について、

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\omega_j x} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (2.8)$$

が成立する」

がすべての n で成立することを数学的帰納法によって示す。

(i) $e^{\omega_1 x}$ は常に0でないので、明らかに $P(1)$ は成立する。

(ii) $P(k)$ が成立すると仮定する($k \in \mathbb{N}$)。ここで、相異なる複素数 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}$ と、複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ について、

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e^{\omega_j x} = 0 \quad (2.9)$$

が成立しているとき、両辺を $e^{\omega_{k+1} x} (\neq 0)$ で割ると、

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha_{k+1} + \sum_{j=1}^k \alpha_j e^{(\omega_j - \omega_{k+1})x} = 0 \quad (2.10)$$

を得る。このとき、両辺を x で微分して得られる

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^k (\omega_j - \omega_{k+1}) \alpha_j e^{(\omega_j - \omega_{k+1})x} = 0 \quad (2.11)$$

も成立する。ここで仮定した $P(k)$ より、

$$(\omega_j - \omega_{k+1}) \alpha_j = 0 \quad (j = 1, \dots, k) \quad (2.12)$$

が成立する。ここで、 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}$ が相異なることに注意すれば、

$$\alpha_j = 0 \quad (j = 1, \dots, k) \quad (2.13)$$

が成り立つ。式(2.11)より、 $\alpha_{k+1} = 0$ 。よって、 $P(k+1)$ が成立することが示された。

(i)(ii)より、題意は示された。

3. 補足

解答 1 と同じ手法で、三角関数も独立なことが示せますね。